JIPF-UNSRI
ejournal.unsri.ac.id/index.php/JIPF
JURNAL INOVASI DAN PEMBELAJARAN FISIKA (JIPF)
Journal of Innovation and Physics Learning
p-ISSN 2355-7109 e-ISSN 2657-0971
Program Studi Pendidikan Fisika
Universitas Sriwijaya
Jalan Raya Palembang-Prabumulih
KM 32 Ogan Ilir
jipf@fkip.unsri.ac.id

ANALISIS MOMEN INERSIA *TIPPE TOP* DI BIDANG DATAR SEBAGAI KONTRIBUSI PADA MATA KULIAH MEKANIKA

Melly Ariska
Dosen Pendidikan Fisika Universitas Sriwijaya
Jalan Palembang-Prabumulih, Indralaya Palembang
Email: ariskamelly@yahoo.co.id

Abstrak: The moment of inertia of a reverse gas can be calculated by physically analyzing the parts of the return gas. The back casing consists of a cut ball and a small tube. The back of the head is a ball (sphere) which has a radius R while the handle forms a finger that has fingers. The moment of inertia back gasing is the sum of the moment of truncated inertia and the moment of inertia of the tube with the rotating axis at the center of the mass in the back gas. Backfill is an example of a rigid body system that has a holonomic style, which can move in translation and rotation.

Kata-kata kunci : gasing balik, gaya holonomik, momen inersia

PENDAHULUAN

Momeninersiagasingbalik yang bergerak di bidangdatardenganmenggunakanpersamaanEularOlehkarenabentukgasingbalik yang unikdankomplek.Penulistertarikuntukmenganalisismomeninersiapadagasingbalik di bidangdatardenganpersamaanEular.Dinamikarotasisulitdirumuskandenganpersamaan Eular-Lagrange karenadinamikarotasimengandungkecepatansudut yang padaumumnyabukanlahturunanwaktusecaralangsungdarikoordinatumum.Hal inidisebabkan generator rotasitidakkomutatif, sehinggadinamikarotasisulitjikadiselesaikandenganpersamaanEular-Lagrange.PersamaanPoincarédipiliholehpenuliskarenapersamaaninidapatmerumuskandinamikagasingbalikdenganjelas.Selainitu, persamaanPoincarédapatmenggambarkansistemdinamikberupasistempersamaandiferensial. Kajianinimerupakanupayauntukmemahamigerak gasingbalikdenganmenggunakanteorigrupdalampenyederhanaanpersamaan

gerakgasingbalikmelaluipersamaanPoincaré.

Asalusulpenelitiantentanggerakangasingbalikdijelaskandalamsebuahbukutahun 1890 oleh John Perry (dalam Cohen, 1977) yang bereksperimendenganmemutarbatubulat yang ditemukan di Pantai. Perry menjelaskanbahwabatubulatinimemilikipusat massa yang tidakberimpitdenganpusatgeometribatutersebut. Ketikabatudiputar, pusatmassamenjadilebihtinggimenjauhipermukaantanah. Penjelasanmengenaigerakangasingbalikmulaidituangkandalambeberapaartikelilmiahsejaktahun 1950-an, di antaranyaolehPliskin (1953) yang menyatakanbahwainteraksigesekanpadagasingbalikterhadaplantaiberperanpentingdalamputarangasingbalik. Sementara Synge tahun 1952 (dalamPliskin, 1953) menjelaskanbahwafenomenagerakangasingbalikmerupakanakibatketidakstabilandinamikatanpamelibatkangesekan.Selanjutnya, Del Campo padatahun 1955 (dalam Cohen, 1977) menjelaskansecararincidenganperhitunganmatematismengenaiperanangesekanpadagasingbalik.Del Campo menyimpulkanbahwagesekanlah yang memengaruhiperistiwapembalikanpadagasing balik.

METODE PENELITIAN

Penelitianinibersifatkajianteoretismatematis.Penelitiandilakukandengantinjauanterhadapbeberapapustakamengenaisistemmekanikpadakasusgasingbalik yang telahdikembangkansebelumnyasertaperhitunganmatematis.

Persamaan Poincare dapatdituliskandengan,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial s^i}\right) - c^r{}_{li}(q)s^l\frac{\partial\bar{T}}{\partial s^r} - \frac{\partial\bar{T}}{\partial\sigma^i} = S_i$$

Akan tetapi, persamaaninimenuntut agar ditemukannyakecepatankuasisebagaiturunanlangsungterhadapwaktudarikoordinatkuasi.Sementara, padakasusgasingbalikkecepatankuasi yang dimilikibukanlahturunanwaktusecaralangsung darikoordinatsiklik.Olehsebabitu, Persamaan Poincare yang digunakandalampenelitianiniuntukmenganalisisdinamikagasingbalik di bidangdatardanpermukaandalamtabungadalah persamaan Poincare yang didasaridenganreduksiRouthian, yang dapatdituliskansebagaiberikut

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial v^\rho} - \sum_{\mu=2}^{n}\sum_{\lambda=2}^{n} c^\lambda{}_{\mu\rho}v^\mu\frac{\partial R}{\partial v^\lambda} - \sum_{\mu=2}^{n} c^\lambda{}_{\mu\rho}v^\mu\beta_1 - X_\rho R = 0$$

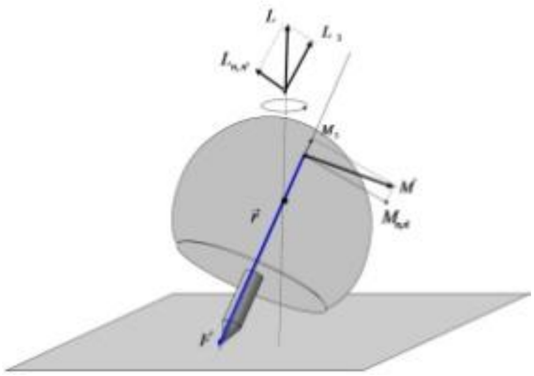
Gerakanbendategardigambarkanolehduapersamaanvektor, yaitu$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ untuk translasi pada pusat massa, dan $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ untuk rotasi di sekeliling pusat massa, dengan **F**gayaekternal total, **p**momentum, **M**momen total gaya ekternal, dan **L**momentum sudut. Gasingbalikterdiridari bola danbatangsilinderdenganpusatmassadapatberpindahdaripusat$c$ pada bola, maksudnyadapatlurus di bawahpusatgeometriataulurus di ataspusatgeometri.

Awalnyagasingbalikberputar di sekitarsumbusimetrinyayaitu$\hat{\mathbf{e}}_3$secara vertikal, kemudian batang gasing balik secara perlahan bergerak turun dan akhirnya kepala membalik ke atas dan berotasi secara vertikal dengan batang gasing balik.Rotasimengubaharahgasingbalik, sementaravektor**L** tetap bertahan pada posisi vertikal aslinya. Selanjutnya, pusat massa bergerak ke atas akibat menurunnya nilai **L**. Hal ini disebabkan oleh aksi gesekan **F** pada titik kontak gasing balik terhadap meja.

Gaya gesek**F** menyebabkan timbulnya momen gaya **M**, yang dapat dibayangkan memiliki komponen vektor $\mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}dan\mathbf{M}_3$ di sepanjang sumbu simetri $\hat{\mathbf{e}}_3$. Demikian pula, momentum sudut **L** memiliki komponen $\mathbf{L}_{n,n'}$dan $\mathbf{L}_3$. Pada awalnya, $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}$dan $\mathbf{L}_{n,n'} = 0$, akibatadanyaketidakstabilan, gayagesekanmenghasilkan$\mathbf{M}_3$yang menurunkan $\mathbf{L}_3$, sementara $\mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}$ mulai meningkatkan $\mathbf{L}_{n,n'}$. Karena **L** bertahan konstan, sudut θyaitu sudut kemiringan gasing balik akan terus membesar, dan ketika $\theta = \pi/2$, $\mathbf{L}_3 = 0$ dan $\mathbf{L}_{\mathrm{n,n}'} = \mathbf{L}$.Kemudianrotasi di sepanjangsumbu 3 berubaharah, dankarenaaksi$\mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}dan\mathbf{M}_3$, $\mathbf{L}_3$mulai meningkat karena menurunnya $\mathbf{L}_{\mathrm{n,n}'}$. Akhirnya, batang menyentuh meja karena aksi gaya gesekan dan momen gaya baru, yaitu $\mathbf{F}'$dengan momen torsi $\mathbf{M}'$ yang membuatgasingbalikdapatmengangkatdirinya sendiridenganstabil.

Komponen$\mathbf{L}_{\mathrm{n,n}'}$dilambatkan oleh $\mathbf{M}_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}$yang baru dan akhirnya $\mathbf{L}_3$menjadi sama dengan **L**.

Selama proses inversiberlangsungpusatmassapadagasingbalikditinggikan. Hal inimenyatakanenergikinetikrotasionalmenurunselamainversiberlangsungakibatnyaenergipotensialmengalamipeningkatan, sehinggakecepatansudut total dan momentum sudut total menurunselama proses inversi. Proses inidapatdilihatpadaGambar 1 yang menunjukkan proses inversipadagasingbalik.



Gambar1.TitikPusat Massa PadaGasingBalik

HASIL DAN PEMBAHASAN

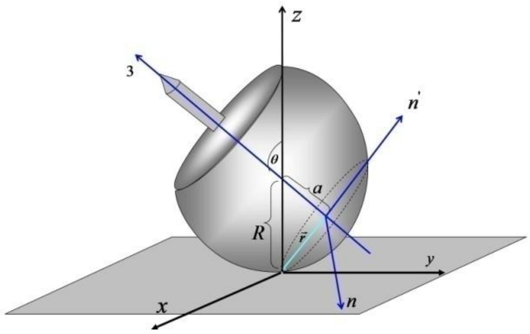
MomenInersiaGasingBalik

Gasingbalikmerupakansebuah bola dengan radius R yang memilikidistribusimassasimetrisumbutetapitidaksimetri bola, sehinggapusatmassadanpusatgeometritidakberimpit. Garis yang menghubungkanpusatmassadanpusatgeometriadalahsumbusimetriinersialgarisinimerupakan bidang yang tegaklurusterhadapsumbu tensor momeninersiapada bola yang mempunyaiduamomeninersiautama yang samayaitu$I_n = I_{n'} = I$, sedangkan momen inersia sepanjang sumbu simetri dinotasikan dengan I_3, sehingga besar I dan I_3 dapat ditentukan. Hal pertama yang dilakukanadalahmenemukanmomenutamapadagasingbalikpadapusatmassaseperti yang ditunjukkanolehGambar1.Kepalagasingbalikadalahbagian bola (*sphere*) terpotong yang memiliki radius *R*sedangkanpegangannyaberbentuktabung yang memilikijari-jari*b*danujungnyaberbentukkerucutdenganjari-jarir_k dan tinggi h. Momen inersia dengan sumbu putar sumbu *3*atausumbu*n*dan*n'*merupakanjumlahandarimomeninersia bola terpotong,tabung, dankerucutgasingbalik, sehingga

$$I_{TT} = I_{bola} + I_{tabung} + I_{kerucut}$$

Untukmenghitungmomeninersiamasing-masingsumbuakandiuraikandalamperhitungan sebagaiberikut.

MomenInersiaGasingBalikpadaSumbu*3*



Gambar2.Sumbuputarpadagasingbalik

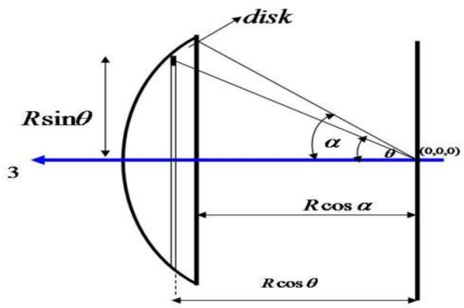
Gasingbalikterdiridari bola padat yang terpotongdantabung yang dianggapsebagaipeganganpadagasingbaliktersebut.Momeninersiapada bola utuhdengansumbuputarpadasumbu 3 adalah

$$I_{bola\ utuh} = \frac{2}{5}\, mR^2 = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$$

denganmassa bola sebesar

m = $\rho \frac{4}{3}\pi R^3$

sedangkanmomeninersiapadabagian bola gasingbalikyangterpotongdenganmengasumsikanpotongan bola tersebutsebagaitumpukan disk denganbatas-batastertentu yang dapatdilihatpadagambar



Gambar3.Potongan bola gasingbalikdengansumbu 3 sebagaisumbuputar

Momeninersiapotongan bola gasingbalikdengansumbuputaradalahsumbu 3

$$dI = \frac{1}{2} dmr^2$$

dengan

$$I_D = \frac{1}{2} mR_D{}^2$$

dan$R_D = R \sin\theta$

maka,

dI $= \frac{1}{2} dm(R\sin\theta)^2$

sehingga

$$I = \rho \int_{\theta=0}^{\alpha} \left[\frac{(R\sin\theta)^2}{2}\right] dV$$

$$= \frac{8}{15}\pi\rho R^5 + \left(\frac{1}{2}\pi\rho R^5 \left(\frac{4}{15}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)(18\cos\alpha + 3\cos(2\alpha) + 19)\right)\right)$$

karena,

$$m_b = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

maka,

$$I_{bola\ TT} = m_b R^2 \left(\frac{32}{15} + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{15}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)(18\cos\alpha + 3\cos(2\alpha) + 19)\right)\right)$$

danuntukmomeninersiatabungpadapegangang asingbalikdengansumbuputarsumbu 3 adalah

$$I_{tabung} = \frac{1}{2} m_t b^2$$

sedangkan,
momeninersiakerucutterhadapsumbu 3 adalah

$$I_{kerucut} = \frac{3}{10} m_k r_k{}^2$$

Jadi, momeninersiagasingbalikpadasumbu 3 adalah

$$I_{TT} = I_{bola\ TT} + I_{tabung} + I_{kerucut}$$

$$= m_b R^2 \left(\frac{32}{15} + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{15}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)(18\cos\alpha + 3\cos(2\alpha) + 19)\right)\right) + \frac{1}{2} m_t b^2 + \frac{3}{10} m_k r_k{}^2.$$

Momeninersiapadasumbu$n$ dan n'

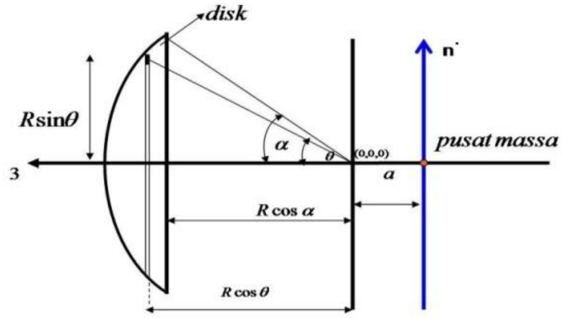
Gasing balik terdiri dari bola solid yang terpotong dan tabung yang dianggap sebagai pegangan pada gasing balik tersebut. Momen inersia pada bola utuh dengan sumbu putar pada *n*atau*n'*adalah

$$I_{bola\ utuh} = I_{CM} + I_d$$

$$= \frac{2}{5} mR^2 + ma^2 = \pi R^3 \left(\frac{16}{30}\rho R^2 + \frac{40}{30}\rho a^2\right)$$

sedangkanmomeninersiapadabagian bola gasingbalikyangterpotongadalah:

Dalammenghitungmomeninersiabagia npotongan bola padagasingbalik, potongan bola gasingbalikdiasumsikansebagaitumpukan disk denganbatas-batastertentu yang dapatdilihatpadaGambar4



Gambar4.Potongan bola gasingbalikdengann' sebagai sumbu putar

sehingga, momeninersiapotongan bola gasingbalikdapatdihitungsebagaiberikut

$$dI = I_D + dml^2$$

dengan

$I_D = \frac{1}{4} m{R_D}^2danR_D = R\sin\theta$

maka,

$$dI = \frac{1}{4} dm(R\sin\theta)^2 + dm(R\cos\theta + a)^2$$

sehingga,

$$I = \rho\int_{\theta=0}^{\alpha}\left[\frac{(R\sin\theta)^2}{4} + (R\cos\theta + a)^2\right]dV$$

untuk volume yang meliputiseluruhruangadalah

$$dV = \pi{R_D}^2 dz$$

Dengan

$$z = R\cos\theta$$

maka,

$$dz = dR\cos\theta - R\sin\theta\, d\theta$$

karena*R*konstan, sukupertamanol, sehingga

$$dz = -R\sin\theta\, d\theta$$

jadi,

$$dV = \pi(R\sin\theta)^2(-R\sin\theta\, d\theta) = -\pi R^3\sin^3\theta\ d\theta$$

dapatdihitungmomeninersia bola gasingbalik yang terpotongadalah

$$I = -\rho\int_{\theta=0}^{\alpha}\left(\frac{(R\sin\theta)^2}{4} + (R\cos\theta + a)^2\right)(\pi R^3\sin^3\theta\, d\theta)$$

$$= \pi R^3((-9\cos^5\alpha + 10\cos^3\alpha + 15\cos\alpha)R^2 - \frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60} + \frac{8R^2 + 15aR + 20a^2}{30})$$

Momeninersia bola terpotongpadagasingbalikmerupakanmomeninersiaseluruh bola dikurangidenganmomeninersiapotongan bola gasingbaliktersebutadalah

$$\mathrm{I_{bola\ TT}} = \mathrm{I_{bola\ utuh}} - \mathrm{I_{potongan\ \ bola\ TT}}$$

$$= \pi R^3\left(\frac{16}{30}R^2 + \frac{40}{30}a^2\right) - \pi R^3(-9\cos^5\alpha + 10\cos^3 + 15\cos\alpha)R^2 - \left(\frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60} + \frac{8R^2 + 15aR + 20a^2}{30}\right)$$

$$= \pi R^3\left(\frac{16}{30}R^2 + \frac{40}{30}a^2\right) + \pi R^3(9\cos^5\alpha - 10\cos^3 - 15\cos\alpha)R^2 + \pi R^3\left(\frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60} + \frac{8R^2 + 15aR + 20a^2}{30}\right)$$

$$= \pi R^3(\frac{24R^2 + 15aR + 60a^2}{30} + (9\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha - 15\cos\alpha)R^2 + \frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60})$$

danuntukmomeninersiatabungpadapegangang asingbalikdengansumbuputar*n*dan*n'*adalah

$$I_{tabung} = m_t(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{12}(R - R\cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}m_t\left(b^2 + \frac{1}{3}R^2(1-\cos\alpha)^2\right)$$

sedangkan, momeninersiakerucutpadasumbu$n$ dan n', yaitu

$$I_{kerucut} = \frac{3}{5}m_k\left(\frac{{r_k}^2}{4} + {h_k}^2\right) + m_k(h_k + b - c + R\cos\alpha + a)^2 - m_k c^2$$

denganh_k adalah tinggi kerucut TT.Jadi, momeninersiagasingbalikpadasumbu$n$ dan n' adalah

$$I_{TT} = I_{bola\ TT} + I_{tabung} + I_{kerucut}$$

$$= \frac{3}{4} m_b \left(\frac{24R^2 + 15aR + 20a^2}{30} + (9\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha - 15\cos\alpha)R^2 + \frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60} \right) + \frac{1}{4} m_t b^2 + \frac{1}{3} R^2 (1-\cos\alpha)^2 + \frac{3}{5} m_k \left(\frac{{r_k}^2}{4} + {h_k}^2 \right) + m_k (h_k + b - c + R\cos\alpha + a)^2 - m_k c^2$$

KESIMPULAN

Berdasarkananalisis mengenai momen inersiagaing balik melaluipersamaanEularpadabidangdatardapat diambilsimpulanbahwamomen inersia gasing balikadalah

$$I_{TT} = I_{bola\ TT} + I_{tabung} + I_{kerucut}$$

$$= \frac{3}{4} m_b \left(\frac{24R^2 + 15aR + 20a^2}{30} + (9\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha - 15\cos\alpha)R^2 + \frac{(30\cos^4\alpha - 60\cos^2\alpha)aR + (20\cos^3\alpha - 60\cos\alpha)a^2}{60} \right) + \frac{1}{4} m_t b^2 + \frac{1}{3} R^2 (1-\cos\alpha)^2 + \frac{3}{5} m_k \left(\frac{{r_k}^2}{4} + {h_k}^2 \right) + m_k (h_k + b - c + R\cos\alpha + a)^2 - m_k c^2$$

DAFTAR PUSTAKA

Bou-Rabee, N. M. Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2004. Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability, *SIAM J. Appl.*Dyn. Syst. 3, 352–377.

Bou-Rabee, N. M. Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2008. Dissipation-Induced Heteroclinic Orbits in Tippe top, *SIAM J. Appl.*Vol 50. No.2. pp. 325-344.

Bloch, A. M., 2003, *Holonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag, New York.

Ciocci, M.C., Malengier, B., and Langerock, B. 1998.Towards a Prototype of a Spherical Tippe top, *Am. J. Phys.*45.1-27.

Glad, Torkel, Paterson, Daniel, danWojciechhowski, Rauch. 2007. Phase Space of Rolling Solution of the tippe top. *Sigma 3*, 1-14.

Gray, C.G. Nickel. B.G. 2000. Constants of the motion for nonslippingtippe tops and other tops with round pegs. *Am. J. Phys.* 68 (9), 821–828.

Hall, Brian C. 2003. *Lie Groups, Lie algebras, and representations*-Verlag.