



PENYELESAIAN DINAMIKA PESAWAT ATWOOD DENGAN PERSAMAAN EULAR-LAGRANGE SEBAGAI ALTERNATIF PERSAMAAN NEWTON PADA FISIKA SMA

Melly Ariska

Dosen Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jalan Palembang-Prabumulih, KM 32 Indralaya Ogan Ilir
Email: ariskamelly@yahoo.co.id

ABSTRAK

Telah diturunkan persamaan gerak pesawat Atwood dengan persamaan Lagrange. sistem mekanik dengan kendala holonomik untuk pesawat Atwood yang bergerak dapat digambarkan dengan persamaan Euler-Lagrange, yaitu sistem dinamika yang dapat digambarkan dengan persamaan diferensial dan energi sistem dinyatakan dengan jelas. Persamaan Euler-Lagrange untuk pesawat Atwood dengan energi yang rendah adalah:

Persamaan pesawat Atwood yang dicari dengan Hukum Newton hasilnya sama jika dicari dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange. Persamaan Euler-Lagrange dapat merumuskan persamaan dinamika sistem yang lebih kompleks dengan jelas tanpa harus menginventarisasi gaya-gaya pada sistem gerak tersebut.

Kata kunci : Persamaan Lagrange, Pesawat Atwood. Hukum Newton.

Cara Menulis Sitasi: Ariska, Melly (2019). Penyelesaian Dinamika Pesawat Atwood Dengan Persamaan Euler-Lagrange Sebagai Alternatif Persamaan Newton Pada Fisika Sma. *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika*, 6 (1), 61-68.

PENDAHULUAN

Semua gejala alam dalam mekanika klasik dapat digambarkan dengan menggunakan hukum-hukum Newton tentang gerak. Hukum Newton menghubungkan percepatan sebuah benda dengan massanya dan gaya-gaya yang bekerja padanya. Hukum II Newton dapat digunakan pada persoalan yang sederhana seperti pada pesawat atwood (Tipler, 1998: 87).

Pesawat Atwood merupakan alat eksperimen yang digunakan untuk mengamati hukum mekanika gerak yang berubah beraturan. Alat ini mulai dikembangkan sekitar abad ke delapan belas untuk mengukur percepatan gravitasi g . Sederhananya alat ini tersusun atas seutas tali yang dihubungkan dengan sebuah katrol, dimana pada ujung tali dikaitkan massa beban m_1 dan m_2 . Selain itu, Pesawat Atwood merupakan alat peraga yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara tegangan, energi potensial dan energi kinetik dengan menggunakan dua pemberat (massa berbeda) yaitu m_1 dan m_2 dihubungkan dengan tali pada sebuah katrol. (Wasino,dkk. 2013).

Pesawat atwood ini dipengaruhi oleh gaya-gaya yang konstan. Jika ditinjau dari gerak partikel yang terkendala pada suatu permukaan bidang, maka diperlukan adanya gaya tertentu yakni gaya konstrain yang berperan mempertahankan kontak antara partikel dengan permukaan bidang. Namun, tak selamanya gaya konstrain yang beraksi terhadap partikel dapat diketahui. Pendekatan Newton memerlukan informasi gaya total yang beraksi pada partikel. Oleh karena itu, jika dalam kondisi khusus terdapat gaya yang tak dapat diketahui, maka pendekatan Newton sulit diterapkan. Oleh sebab itu, ada cara lain untuk merumuskan gerak mekanik dengan meninjau sistem tersebut dari energinya.

Jika gaya pada sistem gerak sulit untuk diketahui maka dapat ditinjau pesawat atwood dengan persamaan Lagrange. Persamaan Lagrange ini meninjau sistem dari segi energi total, yakni energi kinetik dan energi potensial. Persamaan Lagrange ini dapat merumuskan sistem gerak pesawat atwood dengan jelas. Dari latar belakang tersebut penulis tertarik untuk menjelaskan penyelesaian masalah gerak dengan persamaan eular-lagrange untuk merumuskan dinamika sistem sebagai alternatif dari persamaan Newton.

Mesin Atwood atau sering disebut pesawat Atwood diciptakan pada tahun 1784 oleh matematikawan Inggris George Atwood sebagai percobaan laboratorium untuk memverifikasi hukum mekanik gerak dengan percepatan konstan. Mesin Atwood adalah demonstrasi kelas yang umum digunakan untuk memahami hukum II Newton tentang gerak.

Pesawat Atwood ini terdiri dari beban, yakni massa m_1 dan massa m_2 . Kedua beban tersebut dihubungkan dengan tali yang bermassa kecil. Tali dihubungkan dengan sebuah katrol dengan massa yang kecil dan hampir tidak memiliki gaya gesekan. Pesawat Atwood bisa dilihat dibawah ini:

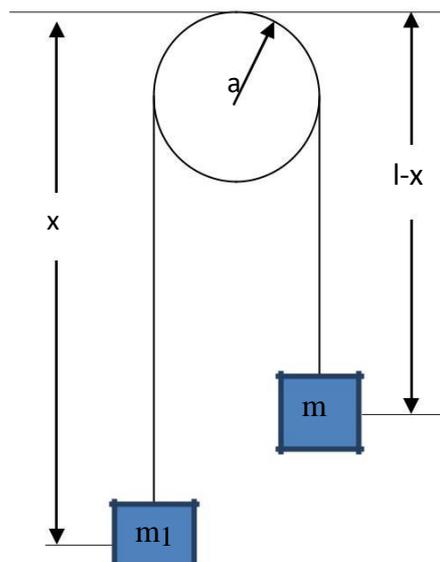


Gambar 1. Pesawat Atwood

Jika massa benda m_1 dan massa benda m_2 sama ($m_1 = m_2$) maka keduanya akan diam. Jika massa benda m_1 lebih besar daripada massa benda m_2 ($m_1 > m_2$) maka massa m_2 akan tertarik oleh massa benda m_1 . Sebaliknya jika massa benda m_1 lebih kecil daripada massa benda m_2 ($m_1 < m_2$) maka massa m_1 akan tertarik oleh massa benda m_2 .

METODE

Penelitian merupakan kajian teoritis matematis. Persamaan gerak pesawat Adwood diselesaikan dengan persamaan Lagrange. Persamaan Lagrange pada Pesawat Atwood



Gambar 2. Pesawat Atwood

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (1)$$

$$\frac{d(l-x)}{dt} = \frac{dl}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0 - \dot{y} = -\dot{x} \quad (2)$$

Kecepatan sudut katrol adalah

$$\omega = \frac{\dot{x}}{a} \quad (3)$$

Dimana a merupakan jari-jari katrol.

Energi kinetik sistem pada massa m_1 adalah

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x})^2 \quad (4)$$

Energi kinetik rotasinya adalah

$$\begin{aligned} T_{rotasi} &= \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 \\ T_{rotasi} &= \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Energi kinetik sistem pada massa m_2 adalah

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2(-\dot{x})^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x})^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Maka, energi kinetik total sistem ini

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_{rotasi} + T_2 \\ T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{1}{2}m_2(\dot{x})^2 \\ T &= \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{I}{a^2} + m_2\right)(\dot{x})^2 \end{aligned} \quad (7)$$

dengan I merupakan momen inersia katrol.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada sistem katrol seperti gambar di atas, terdapat energi potensial pada massa m_1 dan massa m_2 . Dimana massa m_1 lebih kecil dari pada massa m_2 ($m_1 < m_2$), maka massa m_1 akan tertarik oleh massa m_2 sehingga energi potensial pada massa m_1 berlawanan dengan arah gravitasi. Sedangkan pada massa m_2 , energi potensialnya searah dengan gaya gravitasi.

Energi potensial sistem pada massa 1,

$$\begin{aligned} V_1 &= m_1(-g)x \\ V_1 &= -m_1gx \end{aligned} \tag{8}$$

Energi potensial sistem pada massa 2,

$$V_2 = m_2g(l - x) \tag{9}$$

Sehingga energi potensial total sistem adalah

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ V &= -m_1gx + m_2g(l - x) \\ V &= -m_1gx + m_2gl - m_2gx \\ V &= -(m_1g + m_2g)x + m_2gl \end{aligned} \tag{10}$$

Untuk mencari energi total sistem, gunakanlah fungsi Lagrange L pada persamaan (10),

$$L = T - V$$

Dimana T adalah energi kinetik sistem dan V adalah energi potensial sistem.

Masukkan persamaan (8) dan persamaan (9) ke dalam fungsi Lagrange L .

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ L &= \left\{ \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) (\dot{x})^2 \right\} - \{ -(m_1g + m_2g)x + m_2gl \} \\ L &= \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) (\dot{x})^2 + (m_1g - m_2g)x - m_2gl \end{aligned}$$

Jadi, fungsi Lagrange L pada sistem katrol ini adalah

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) (\dot{x})^2 + (m_1 - m_2)gx - m_2gl \tag{11}$$

Dan persamaan Lagrangennya,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) (\dot{x})^2 + (m_1 - m_2)gx - m_2gl \right)}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(m_1\dot{x} + \frac{1}{a^2}\dot{x} + m_2\dot{x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) (\dot{x})^2 + (m_1 - m_2)gx - m_2gl \right) \\ \frac{d}{dt} \left(m_1\dot{x} + \frac{1}{a^2}\dot{x} + m_2\dot{x} \right) &= 0 + (m_1 - m_2)g - 0 \\ \left(m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2 \right) \ddot{x} &= (m_1 - m_2)g \\ \ddot{x} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + \frac{1}{a^2} + m_2} g \end{aligned} \tag{12}$$

Dari ungkapan percepatan tersebut dapat diketahui bahwa apabila $m_1 > m_2$, maka m_1 akan bergerak turun dengan percepatan konstan, sebaliknya jika $m_1 < m_2$, maka m_1 akan bergerak ke atas dengan percepatan konstan (Fowles).

KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat diambil simpulan bahwa sistem mekanik dengan kendala holonomik untuk pesawat Atwood yang bergerak dapat digambarkan dengan persamaan Euler-Lagrange, yaitu sistem dinamika yang dapat digambarkan dengan persamaan diferensial dan energi sistem dinyatakan dengan jelas. Persamaan Euler-Lagrange untuk pesawat Atwood dengan energi yang rendah adalah:

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + \frac{I}{a^2} + m_2} g$$

Persamaan pesawat Atwood yang dicari dengan Hukum Newton hasilnya sama jika dicari dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange. Persamaan Euler-Lagrange dapat merumuskan persamaan dinamika sistem yang lebih kompleks dengan jelas tanpa harus menginventarisasi gaya-gaya pada sistem gerak tersebut.

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai landasan berpijak untuk meneliti sistem mekanik bukan hanya dengan kendala holonomik, tetapi kendala non-holonomik juga dapat dirumuskan dengan persamaan ini. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan meninjau dinamika benda yang bergerak pada ruang lengkung dengan energi yang tidak dibatasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Bou-Rabee, N. M., Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2004. Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 3, 352–377.
- Bou-Rabee, N. M., Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2008. Dissipation-Induced Heteroclinic Orbits in Tippe top, *SIAM J. Appl.* Vol 50. No.2. pp. 325-344.
- Bloch, A. M., 2003, *Holonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag, New York.
- Ciocci, M.C., Malengier, B., and Langerock, B. 1998. Towards a Prototype of a Spherical Tippe top, *Am. J. Phys.* 45.1-27.
- Cohen, C. M. 1977. The Tippe Top Revisited, *Am. J. Phys.* 45.12–17.
- Fowles and Cassiday. 2005. *Analytical Mechanics*. Thomson Learning. Inc. United States of America.
- Glad, Torkel, Paterson, Daniel, dan Wojciechowski, Rauch. 2007. Phase Space of Rolling Solution of the tippe top. *Sigma* 3, 1-14.
- Gray, C.G. Nickel. B.G. 2000. Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs. *Am. J. Phys.* 68 (9), 821–828.
- Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Cambridge.
- Hall, Brian C. 2003. *Lie Groups, Lie algebras, and representations*-Verlag.
- Holm, D. D., Schmah, T. dan Stoica, C., 2009, *Geometry Mechaanics and Symetry from Finite to Infinite Dimensions*, Oxford University Press, New York.
- Karapetyan A.V., On the specific character of the application of Routh's theory to systems with differential constraints, *J. Appl. Math. Mech.* 58 (1994), 387-392.
- Langerock, Bavo., 2007. Dynamics of the Tippe Top via Routhian Reduction. *arXiv:0704.1221v1[math.DS]*. (1-15).
- Pliskin, William. 1953. The Tippe top, *Am. J. Phys.* 22,28-32

Rauch-Wojciechowski, M. Sköldstam, Nawaf, et.al., 2005. Mathematical Analysis of the Tippe Top, Regul. *Chaotic Dyn.* 10, no. 4, 333–362.

Rosyid, M. F., 2009, *Keragaman Licin untuk Fisikawan (Pengantar Hitung Tensor)*, Diktat Kuliah Metode Fisika Teoritik pada Program S2 Fisika UGM, Jurusan Fisika FMIPA UGM, Yogyakarta.

Or. The Dynamics of a tippe top. *SIAM J. on A. Math.*, 54, 3 (1994), 59.

Talman, Richard. 1999. *Geometric Mechanics*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA.