ISSN 1978-0044
E-ISSN 2549-1040

Jurnal Pendidikan Matematika
Volume 19, No. 1, Januari 2019, pp. 73-82

CARA IDENTIFIKASI PENGETAHUAN PROSEDURAL DAN PEMAHAMAN KONSEPTUAL MAHASISWA TERHADAP MATERI LIMIT

Budi Mulyono[1,2], Yaya S Kusumah[2], Rizky Rosjanuardi[3]

[1]Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Sriwijaya, Jl. RayaPalembang-Prabumulih KM. 32 Inderalaya, Kabupaten Ogan Ilir, Sumatera Selatan, Indonesia
[2,3]Departemen Pendidikan Matematika, Sekolah Pasca Sarjana, Universitas Pendidikan Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No. 229, Bandung 40154, Indonesia
E-mail: budimulyono.unsri@gmail.com

Abstract

Limit is the main topic in calculus which is already introduced and thought to students since senior high school level. However, quite a lot of students find difficult to learn and to understand limit at the first year of university level. This article discusses how to identify student’s procedural-knowledge and conceptual-understanding about limit. The method used to identify student’s procedural-knowledge and conceptual-understanding about limit was by giving a test to students about limit problems. The problems were designed so simple in order to avoid mistakes that students made because of the difficulty of questions. The finding of test results show that there were some students whom could answer questions about limit procedurally well, but they had problem to solve questions about limit related to conceptual understanding. This problem could be caused by the learning about limit when they were at senior high school level only focused on how to solve questions about limit procedurall.

Keywords: Limit, Procedural Knowledge, Conceptual Understanding

Abstrak

Limit merupakan materi utama dalam pembelajaran kalkulus yang telah dikenalkan dan dipelajari mahasiswa sejak jenjang sekolah menengah atas. Namun tidak sedikit mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam mempelajari dan memahami materi limit di tingkat awal perguruan tinggi. Seorang mahasiswa tidak hanya harus memiliki pengetahuan prosedural saja, namun juga perlu memiliki pemahaman konseptual tentang limit. Artikel ini membicarakan tentang cara mengidentifikasi pengetahuan prosedural dan pemahaman konseptual mahasiswa terhadap materi limit. Adapun metode yang digunakan untuk mengidentifikasi pengetahuan prosedural dan pemahaman konseptual tersebut adalah dengan memberikan tes kepada mahasiswa berupa soal-soal yang berkaitan dengan materi limit. Soal-soal tes tersebut didesain sederhana dengan tujuan untuk menghindari kesalahan yang muncul disebabkan oleh tingkat kesulitannya. Temuan hasil tes dengan soal-soal yang telah didesain tersebut menunjukkan bahwa terdapat mahasiswa dapat menyelesaikan soal-soal limit dengan baik secara prosedural, namun mereka memiliki permasalahan dalam menyelesaikan soal yang berkaitan dengan pemahaman konseptual. Hal tersebut mungkin disebabkan pembelajaran tentang limit yang mereka dapatkan di jenjang sekolah menengah atas lebih berorientasi pada penyelesaian soal-soal limit secara prosedural saja.

Kata kunci: Limit, Pengetahuan Prosedural, Pemahaman Konseptual

Cara Menulis Sitasi: Mulyono, B., Kusumah, Y. S., & Rosjanuardi, R. (2019). Cara identifikasi pengetahuan prosedural dan pemahaman konseptual mahasiswa terhadap materi limit. *Jurnal Pendidikan Matematika, 13*(1), 73-82.

Purcell *et al* (2006) menyatakan bahwa *“calculus is the study of limits”* yang bermakna bahwa limit merupakan kajian utama dalam kalkulus dan konsep limit merupakan sentral untuk semua permasalahan dalam fisika, teknologi, dan ilmu pengetahuan sosial. Meskipun materi limit telah diajarkan sejak tingkat SMA, namun tidak sedikit mahasiswa tingkat pertama mengalami permasalahan dalam memahami materi limit dan penyelesaian soal-soal limit. Menurut Balka *et al* (2017), pada umumnya penekanan utama di matematika sekolah adalah pada pengetahuan prosedural (*procedural knowedge*), atau yang sekarang dikenal sebagai keahlian prosedural (*procedural fluency*). Menurut Kumsa *et al* (2017), baik pada tingkat lanjutan pertama ataupun tingkat universitas, telah diketahui secara internasional bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan memahami dan mengaplikasikan kalkulus, dan kesulitan utamanya terletak pada pemahaman konsep limit. Menurut Tall (1992) dalam belajar kalkulus mahasiswa untuk pertama kalinya akan dihadapkan dengan konsep limit di mana melibatkan kalkulasi yang tidak lagi dikerjakan dengan aritmatika dan aljabar sederhana, serta proses-proses yang tanpa batas dimana hanya dapat dilakukan dengan argurmen-argumen tidak langsung. Para pengajar terkadang mencoba mengatasi permasalahan tersebut dengan menggunakan suatu pendekatan informal yang lebih bermain pada hal-hal bersifat teknik (Tall, 1992). Menurut Liang (2016) pengajar-pengajar kalkulus biasanya lebih fokus pada kalkulasi limit, terkadang pada ilustrasi grafik limit, namun jarang pada aspek teori atau definisi limit.

Berdasarkan pengalaman penulis dalam mengajar mata kuliah kalkulus, pada umumnya mahasiswa tingkat pertama yang mampu menyelesaikan secara prosedural soal-soal limit dengan baik dan benar, tidak menjamin bahwa mereka memahami konsep limit dengan baik. Pemahaman konsep merupakan pemahaman terhadap konsep-konsep matematika, operasi-operasi, dan relasi-relasi; sedangkan ketrampilan atau keahlian prosedural merupakan ketrampilan atau kelancaran dalam menggunakan prosedur secara fleksibel, secara akurat, secara efisien, dan secara tepat atau sesuai (NCTM, 2000). Pengajar matematika sering membedakan pemahaman konsep dan pengetahuan prosedural (Balka *et al*, 2017). Oleh karena itu penulis tertarik untuk membuat suatu cara untuk identifikasi awal pengetahuan prosedural dan pemahaman konseptual tentang limit.

METODE

Metode yang digunakan untuk mengidentifikasi pengetahuan prosedural dan pemahaman konseptual mahasiswa terhadap materi limit adalah dengan pemberian tes berupa soal-soal yang berkaitan dengan materi limit. Adapun beberapa bentuk soal yang digunakan dalam tes tersebut, yaitu:

1. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2-x}$
2. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3}$
3. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-3}{4-x}$
4. Apakah $f(x) = \sqrt{x}$ memiliki limit pada saat $\to 0$? Jelaskan.
5. Apakah $\lim\limits_{x\to 1} 5x = \lim\limits_{x\to 1} 5$? Berikan penjelasan anda.
6. Apakah $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$? Berikan penjelasan anda.

Pemilihan bentuk soal yang sederhana bertujuan agar kesalahan atau kekeliruan yang dilakukan mahasiswa bukan dikarenakan tingkat kesulitan soal yang diberikan, karena tes yang diberikan lebih ditujukan untuk identifikasi awal pengetahuan prosedural dan pemahaman konsep yang dimiliki mahasiswa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Adapun beberapa jawaban dari hasil tes yang diberikan kepada mahasiswa sebagai berikut: untuk soal nomor 1 yang menanyakan tentang nilai dari $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2-x}$, mahasiswa tidak ada yang memberikan jawaban yang salah. Jawaban mahasiswa untuk soal tersebut seragam dengan cara menyubstitusikan $x = 1$ ke bentuk $\frac{x-1}{2-x}$. Adapun bentuk lengkap jawaban mahasiswa untuk soal tersebut sebagai berikut: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2-x} = \frac{1-1}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$. Dalam hal ini mahasiswa dapat menjawab soal tersebut dengan baik dan benar secara prosedural dengan menggunakan teorema limit substitusi.

Pada soal nomor 2 yang menanyakan nilai dari $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3}$, teridentifikasi bahwa terdapat mahasiswa yang memberikan penyelesaian untuk soal tersebut dengan jawaban-jawaban seperti berikut ini: “tak hingga”, “tak tentu” dan “tak terdefinisi”. Ketiga jawaban tersebut dihasilkan dari proses penyelesaian yang sama di mana mahasiswa menggunakan cara yang sama seperti menyelesaikan soal nomor 1. Adapun bentuk jawaban lengkap mahasiswa sebagai berikut:

$$\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3} = \frac{3-3}{3-3} = \frac{0}{0} = \infty = tak\ hingga, \lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3} = \frac{3-3}{3-3} = \frac{0}{0} = tak\ tentu,$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3} = \frac{3-3}{3-3} = \frac{0}{0} = tak\ terdefinisi.$$

Dari ketiga jawaban tersebut dapat dikatakan bahwa mahasiswa tidak memahami dengan baik makna kata “tak hingga”, “tak tentu”, maupun “tak terdefinisi” dalam konteks penyelesaian soal-soal limit. Secara prosedural terlihat mahasiswa menjawab soal tersebut dengan baik, namun cara yang dilakukan mengandung kesalahan. fakta ini menunjukkan bahwa mahasiswa tidak memiliki pemahaman konsep limit dengan baik.

Mahasiswa yang menjawab dengan benar soal nomor 2 tersebut, mayoritas menggunakan dalil L’Hospital yaitu dengan mencari bentuk turunan dari masing-masing bentuk pembilang dan penyebut soal tersebut. Bentuk jawaban mereka dengan menggunakan dalil L’Hospital seperti berikut ini: $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{0-1}{1-0} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{1} = \lim_{x\to 3} -1 = -1$. Lebih mudah dan tidak rumit merupakan salah satu alasan yang diberikan oleh mahasiswa ketika ditanya mengapa mereka menggunakan dalil L’Hospital dalam menyelesaikan soal-soal limit yang berbentuk $\frac{0}{0}$ bila nilai $x = c$ disubstitusi langsung ke bentuk $f(x)$ yang dicari nilai limitnya saat $x \to c$. Secara prosedural mahasiswa tersebut dapat menyelesaikan dengan baik dan benar soal nomor 2.

Selain menggunakan dalil L'Hospital, ada juga mahasiswa yang menjawab soal nomor 2 dengan memanipulasi atau menyederhanakan bentuk $\frac{3-x}{x-3}$, di mana penyelesaian lengkapnya seperti berikut ini: $\lim_{x\to 3} \frac{3-x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-(-3+x)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} -1 = -1$. Secara prosedural penyelesaian yang diberikan oleh mahasiswa tersebut menghasilkan jawaban baik dan benar, meskipun memang terlihat lebih rumit penyelesaiannya dibandingkan bila menggunakan dalil L'Hospital.

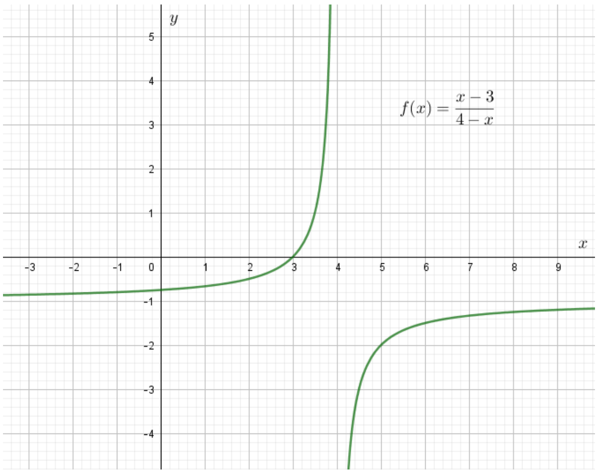
Untuk soal nomor 4 yang menanyakan nilai dari $\lim_{x\to 4} \frac{x-3}{4-x}$, mayoritas jawaban-jawaban mahasiswa adalah sebagai berikut: "tak terdefinisi" ataupun "tak hingga". Langkah prosedural yang mereka gunakan sama seperti langkah untuk menjawab soal-soal sebelumnya, yaitu dengan menyubstitusikan nilai $x = 4$ ke bentuk $\frac{x-3}{4-x}$, di mana bentuk jawaban-jawaban lengkap mahasiswa seperti berikut ini: $\lim_{x\to 4} \frac{x-3}{4-x} = \frac{4-3}{4-4} = \frac{1}{0} = tak\ terdefinisi$ dan $\lim_{x\to 4} \frac{x-3}{4-x} = \frac{4-3}{4-4} = \frac{1}{0} = \infty = tak\ hingga$. Dalam menyelesaikan soal ini mereka tidak menggunakan dalil L'Hospital karena hasil substitusi $x = 4$ ke bentuk $\frac{x-3}{4-x}$ tidak menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$, dan mereka tidak memanipulasi bentuk $\frac{x-3}{4-x}$ karena bentuknya sudah sederhana. Secara prosedural mereka yakin bahwa tidak ada kekeliruan dalam menjawab, namun secara konseptual jawaban yang mereka berikan tidaklah tepat.

Penulis melihat bahwa mahasiswa dalam menjawab soal nomor 4 tidak memahami konsep limit dengan baik bahwa bentuk $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$ nilainya akan semakin lama semakin besar pada saat x semakin dekat ke 4 dari sebelah kiri, sedangkan bentuk $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$ nilainya akan semakin lama semakin kecil pada saat x semakin dekat ke 4 dari sebelah kanan, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 1 dan Gambar 1. Jadi $\lim_{x\to 4} \frac{x-3}{4-x}$ tidak ada dikarenakan $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-3}{4-x} = +\infty$ dan $\lim_{x\to 4^+} \frac{x-3}{4-x} = -\infty$, bukan karena bentuk $\frac{1}{0}$ yang merupakan hasil substitusi $x = 4$ ke bentuk $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$.

Tabel 1. Nilai $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$ pada saat $x \to 4$

x	$f(x) = \dfrac{x-3}{4-x}$
3,9	9
3,99	99
3,999	999
3,9999	9999
3,99999	99999
3,999999	999999
⋮	⋮
4	tidak terdefinisi
⋮	⋮

x	$f(x) = \frac{x-3}{4-x}$
4,000001	-1000001
4,00001	-100001
4,0001	-10001
4,001	-1001
4,01	-101
4,1	-11



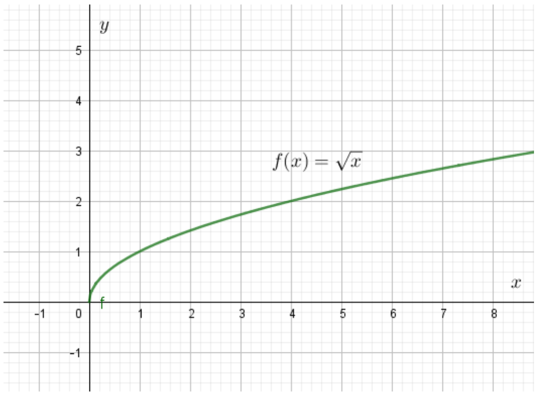
Gambar 1. Grafik $f(x) = \frac{x-3}{4-x}$

Adapun jawaban yang diberikan oleh mahasiswa untuk soal nomor 5 yang menanyakan "apakah $f(x) = \sqrt{x}$ memiliki limit pada saat $x \to 0$" cukup seragam. Mereka langsung menyubstitusikan $x = 0$ ke bentuk $f(x) = \sqrt{x}$ sehingga mereka menyatakan bahwa limitmya ada dan nilai limitnya adalah 0. Dari jawaban yang diberikan oleh mahasiswa tersebut, terlihat bahwa mahasiswa hanya memahami prosedural penyelesaian soal limit dengan menyubstitusikan nilai x ke bentuk fungsi yang bersesuaian dengan soal limitnya. Mahasiswa dalam hal ini tidak memiliki pemahaman konsep limit yang harus memperhatikan limit kiri dan limit kanan. Nilai dari $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ tidak ada karena hanya memiliki limit kanan saja sedangkan limit kirinya tidak ada, karena $f(x) = \sqrt{x}$ hanya terdefinisi untuk $x \geq 0$, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 2 dan Gambar 2.

Tabel 2. Nilai $f(x) = \sqrt{x}$ pada saat $x \to 0$

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0,01	0,1
0,0001	0,01
0,000001	0,001
0,00000001	0,0001
0,0000000001	0,00001

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0,000000000001	0,000001
⋮	⋮
0	0
⋮	⋮
-0,000000000001	Tidak terdefinisi



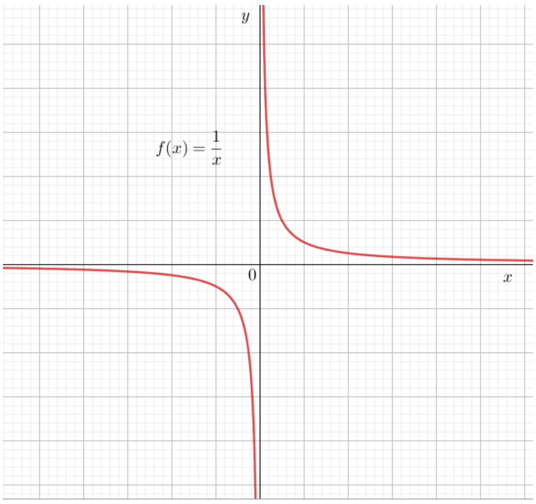
Gambar 2. Grafik $f(x) = \sqrt{x}$

Untuk soal yang nomor 6 yang menanyakan "apakah $\lim_{x\to1} 5x = \lim_{x\to1} 5$ ", terdapat jawaban mahasiswa yang menyatakan bahwa $\lim_{x\to1} 5x$ tidak sama dengan $\lim_{x\to1} 5$ dengan alasan bahwa $\lim_{x\to1} 5x = 5(1) = 5$ sedangkan $\lim_{x\to1} 5 = 0$ karena bentuk $\lim_{x\to1} 5$ tidak ada variabel x untuk dapat disubstitusikan $x = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa tersebut hanya memahami prosedural penyelesaian limit dimana bentuk fungsinya didalamnya tertulis bentuk variabelnya, namun tidak memahami konsep limit dengan baik.

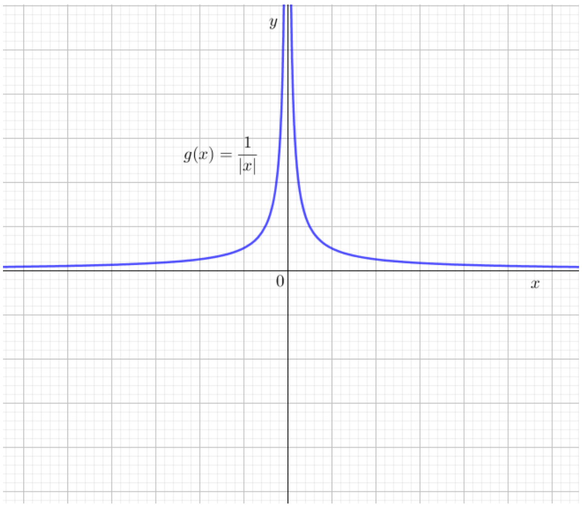
Sedangkan untuk soal nomor 7 yang menanyakan "apakah $\lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{|x|}$ ", terdapat jawaban mahasiswa yang menyatakan bahwa $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ sama dengan $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|}$, karena hasil substitusi $x = 0$ ke bentuk $\frac{1}{x}$ dan $\frac{1}{|x|}$ memberikan hasil yang sama yaitu $\frac{1}{0}$, dimana kesimpulan mereka hanya beda pada kata "tak terdefinisi" dan "tak hingga" untuk bentuk tersebut. Hal ini juga menunjukkan bahwa mahasiswa hanya menggunakan pengetahuan prosedural dengan cara substitusi nilai x tanpa memperhatikan pemahaman bahwa dalam menentukan nilai limit harus ditinjau dari nilai limit kiri dan limit kanannya. $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$ tidak sama dengan $\lim_{x\to0} \frac{1}{|x|}$, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 3, Gambar 3 dan Gambar 4.

Tabel 3. Nilai $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = \frac{1}{|x|}$ pada saat $x \to 0$

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = \frac{1}{\lvert x\rvert}$
0,01	100	100
0,0001	10000	10000
0,000001	1000000	1000000
0,00000001	100000000	100000000
0,0000000001	10000000000	10000000000
0,000000000001	1000000000000	1000000000000
⋮	⋮	⋮
0	tidak terdefinisi	tidak terdefinisi
⋮	⋮	⋮
-0,000000000001	-1000000000000	1000000000000
-0,0000000001	-10000000000	10000000000
-0,00000001	-100000000	100000000
-0,000001	-1000000	1000000
-0,0001	-10000	10000
-0,01	-100	100



Gambar 3. Grafik $f(x) = \frac{1}{x}$



Gambar 4. Grafik $g(x) = \frac{1}{|x|}$

Dari uraian hasil jawaban-jawaban mahasiswa di atas terlihat bahwa mahasiswa lebih cenderung menggunakan pengetahuan prosedural dalam menjawab soal-soal limit dan sangat kurang menggunakan pemahaman konseptual tentang limit. Meskipun soal-soal yang didesain tersebut terlihat sederhana dan tidak terlalu sulit untuk diselesaikan, namun faktanya tidak sedikit mahasiswa khususnya mahasiswa tingkat pertama yang teridentifikasi melakukan kesalahan-kesalahan dalam menjawab soal-soal tersebut. Kesalahan-kesalahan dalam penyelesaian soal-soal matematika khususnya materi limit tidak terlepas dari miskonsepsi yang dimiliki oleh mahasiswa (Mulyono dan Hapizah, 2017 a). Menurut Muzangwa dan Chifamba (2012) miskonsepsi-miskonsepsi pada pembelajaran kalkulus merupakan suatu hasil dari pemahaman yang kurang terhadap materi-materi dasar kalkulus, seperti limit-limit dari fungsi-fungsi serta representasinya.

Menurut Mulyono dan Hapizah (2017 b) secara umum kesalahan-kesalahan mendasar mahasiswa dalam penyelesaian soal-soal limit antara lain: mahasiswa menganggap bahwa pada soal limit dapat diselesaikan bilamana terdapat variabel (misalnya variable x) pada fungsi yang akan ditentukan nilai limitnya, mahasiswa menganggap nilai limit pada saat adalah hasil substitusi langsung nilai variabel ke fungsi, mahasiswa tidak memperhatikan limit kiri dan limit kanan dalam menentukan limit suatu fungsi, dan mahasiswa tidak menggunakan dengan baik informasi yang diberikan dalam bentuk grafik fungsi dalam menentukan nilai limit suatu fungsi.

KESIMPULAN

Soal-soal yang didesain tersebut diatas dapat digunakan untuk identifikasi awal apakah seorang mahasiswa memiliki pengetahuan prosedural dan juga pemahaman secara konseptual tentang limit. Mahasiswa tingkat pertama mayoritas masih menggunakan pengetahuan prosedural yang tidak dilengkapi dengan pemahaman konseptual dalam menyelesaikan soal-soal limit. Mereka cenderung menentukan nilai $\lim_{x\to c} f(x)$ dengan cara menyubstitusikan nilai $x = c$ ke bentuk $f(x)$ tanpa memperhatikan dengan baik nilai limit kiri dan limit kanannya. Jordaan (2005) menyatakan bahwa banyak mahasiswa memiliki pemahaman yang salah tentang konsep limit di mana mereka berpikir bahwa sebuah fungsi harus terdefinisi pada suatu titik untuk memiliki limit pada titik tersebut, dan mereka juga berpikir bahwa nilai limit pada suatu titik selalu sama dengan nilai fungsi pada titik tersebut. Ingatan terhadap formula-formula dan penguasaan terhadap komputasi tidaklah sama dengan pengetahuan yang benar terhadap konsep-konsep dan ide-ide matematika (Mulyono & Hapizah, 2018). Hal ini sebaiknya dapat dijadikan bahan refleksi untuk pengajar bahwa pada pembelajaran materi limit sewaktu di SMA ataupun di perguruan tinggi sebaiknya penekananan secara konseptual lebih diperhatikan.

DAFTAR PUSTAKA

Balka, Hull & Miles, H. (2017). *What Is Conceptual Understanding?*. Diambil dari www.mathleadership.com. diakses April 2017.

Jordaan, T. (2005). Misconceptions of The Limit Concept in a Mathematics Course for Engineering Students. *Research Report Submitted in Part Fulfilment of The Requirements for The Degree of Master of Education–With Specialisation in Mathematics Education*. University of South Africa.

Kumsa, A., Pettersson, K., & Andrews, P. (2017). Obstacles to students' understanding of the limit concept. *Paper presented at 10th Congress of European Research in Mathematics Education*.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35-48.

Mulyono, B. & Hapizah. (2017 a). Does Conceptual Understanding of Limit Partially Lead Students to Misconceptions? *J. Phys.*: Conf. Ser. 895 012061.

Mulyono, B. & Hapizah. (2017 b). Identifikasi Kesalahan Mahasiswa dalam Penyelesaian Soal-Soal Limit. *Prosiding Seminar Nasional 20 Program Pascasarjana Universitas PGRI Palembang*.

Mulyono. B. & Hapizah. (2018). Pemahaman konsep dalam pembelajaran matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika KALAMATIKA*, *3*(2), 103-122. P-ISSN 2527-5615 E-ISSN 2527-5607.

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), ISSN 2065-1430.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Purcell, Rigdon, & Varberg. (2006). Calculus. Pearson 9th Edition. ISBN-10: 0131429248

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992, Québec, Canada*, 13–28. ISBN 2 920916 23 8.